第 10 講　総合問題(2)

1 (1)　1 から n までの自然数の総和が偶数になるのは n がどのような数の場合か.

(2)　1 から n までの自然数の総和が偶数であるとき，1 から n までの自然数を 2 つの組に分けてそれぞれの組に属する数の総和が等しくなるようにできることを証明せよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n 枚のカードがあり，1 枚目のカードに 1，2 枚目のカードに 2，……，n 枚目のカードに n が書かれている．これらの n 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し，もう一度無作為に 1 枚を取り出す．取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x，y とする．また，k を n の約数とする．

(1)　$x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ．

(2)　さらに，$k=pq$ とする．ただし，p，q は異なる素数である．xy が k の倍数となる確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n を正の整数とする．

(1)　$x^2+y<n^2$ を満たす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 a_n を求めよ．

(2)　$\sqrt{x^2+y}$ を超えない最大の整数が n であるような正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 b_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　総合問題(2)

1　(1)　1からnまでの自然数の総和が偶数になるのはnがどのような数の場合か.

(2)　1からnまでの自然数の総和が偶数であるとき，1からnまでの自然数を2つの組に分けてそれぞれの組に属する数の総和が等しくなるようにできることを証明せよ.

(1)　1からnまでの自然数の総和は　$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

n，$(n+1)$は隣接2整数よりいずれかは偶数である．以下kを自然数とする.

$n=2k$のとき　$S=\dfrac{2k(2k+1)}{2}=k(2k+1)$

$2k+1$は奇数よりkが偶数のときSは偶数となる．このときnは4の倍数である.

$n+1=2k$のとき　$S=\dfrac{(2k-1)\cdot 2k}{2}=k(2k-1)$

$2k-1$は奇数よりkが偶数のときSは偶数となる.

このとき　$n=2(2l)-1=4l-1$（lは整数）と表される．よってnは4で割ると3余る数．したがって，Sが偶数となるのは　nが**4の倍数**，または**4で割ると3余る数**である.

(2)　2つの組のそれぞれの総和が$\dfrac{S}{2}=\dfrac{n(n+1)}{4}$となるように分けることができることを示す．$S$が偶数のとき，(1)より$n=4m$，$4m-1$（$m$は自然数）と表すことができる.

$n=4m$のとき　$\dfrac{S}{2}=\dfrac{4m(4m+1)}{4}=m(4m+1)$

一例として　1，2，3，……，$m-1$，m，$3m+1$，$3m+2$，……，$4m-2$，$4m-1$，$4m$
を一方の組にすれば題意を満たす.

$n=4m-1$のとき　$\dfrac{S}{2}=\dfrac{(4m-1)\cdot 4m}{4}=m(4m-1)$

一例として　1，3，5，……，$2m-3$，$2m-1$，$2m$，$2m+2$，……，$4m-6$，$4m-4$，$4m-2$
を一方の組にすれば題意を満たす.

ゆえに，題意のように分けることができることが示された.

2　n枚のカードがあり，1枚目のカードに1，2枚目のカードに2，……，n枚目のカードにnが書かれている．これらのn枚のカードから無作為に1枚を取り出してもとに戻し，もう一度無作為に1枚を取り出す．取り出されたカードに書かれている数をそれぞれx，yとする．また，kをnの約数とする.

(1)　$x+y$がkの倍数となる確率を求めよ.

(2)　さらに，$k=pq$とする．ただし，p，qは異なる素数である．xyがkの倍数となる確率を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$n=mk$（m は整数）とおくと

1から n までの中に k の倍数は m 個あり，

同様に k で割ると r 余る数（$1\leqq r\leqq k-1$）も m 個ずつある．

$x+y$ が k の倍数となるのは以下

(i)　x，y がともに k の倍数（1通り）

(ii)　x を k で割った余りが r（$1\leqq r\leqq k-1$），y を k で割った余りが $k-r$（$k-1$ 通り）

(i)，(ii)いずれの場合も x，y はそれぞれ m 通りあり，(i)，(ii)合わせて事象は k 通りある．

よって，求める確率は　$\dfrac{k\cdot m^2}{n^2}=\dfrac{km^2}{m^2k^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{k}}$

(2)　$n=mk=mpq$ とおく．xy が k すなわち pq の倍数となるときを考える．

1から n までの中で

p の倍数となるものは mq 個

q の倍数となるものは mp 個

pq の倍数となるもの　……①　は m 個

p の倍数であるが q の倍数でないもの　……②　は $mq-m=m(q-1)$（個）

q の倍数であるが p の倍数でないもの　……③　は $mp-m=m(p-1)$（個）

p の倍数でも q の倍数でもないもの　……④　は $mpq-(mq+mp-m)$

$=m(p-1)(q-1)$（個）

x が①のとき y は任意

x が②のとき y は q の倍数

x が③のとき y は p の倍数

x が④のとき y は pq の倍数　である．

よって，求める確率は

$$\frac{1}{n^2}\{m\cdot mpq+m(q-1)\cdot mp+m(p-1)\cdot mq+m(p-1)(q-1)\cdot m\}$$

$$=\frac{m^2(4pq-2p-2q+1)}{m^2p^2q^2}=\boldsymbol{\frac{(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2}}$$

3　n を正の整数とする．

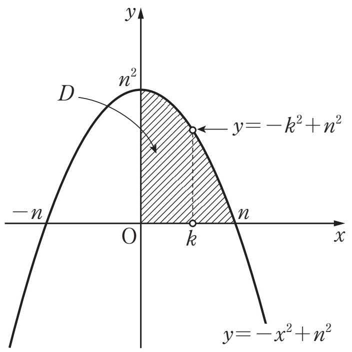
(1)　$x^2+y<n^2$ を満たす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 a_n を求めよ．

(2)　$\sqrt{x^2+y}$ を超えない最大の整数が n であるような正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数 b_n を求めよ．

(1)　右図領域 D（斜線部．境界含まない）に属する格子点の個数が求める a_n である．

$n\geqq 2$ のとき，直線 $x=k$ 上（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$）にある格子点の個数は $(-k^2+n^2-1)$ 個である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



ゆえに　$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\{-k^2+(n^2-1)\}$

$$=-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+(n^2-1)\cdot(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6)\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき D は格子点を含まないので $a_1=0$ であり，
$n=1$ のときも①は成り立つ.

よって　$\boldsymbol{a_1=\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6)}$（個）

(2)　題意より $n\leqq\sqrt{x^2+y}<n+1$ を満たす，つまり $n^2\leqq x^2+y<(n+1)^2$ を満たす第 1 象限の格子点の個数を求める.

それは同象限内の格子点のうち $x^2+y<(n+1)^2$ を満たすものから $x^2+y<n^2$ を満たすものを除いたものの個数である.

ゆえに

$$b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{1}{6}n\{4(n+1)^2+(n+1)-6\}-\frac{1}{6}(n-1)(4n^2+n-6)=2n^2+n-1$$

$$=\boldsymbol{(n+1)(2n-1)}\text{（個）}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍であることを示せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n は 2 以上の整数とする．座標平面上の x 座標，y 座標がともに 0 から $n-1$ までの整数であるような n^2 個の点のうちから，異なる 2 個の点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を無作為に選ぶ．

(1)　$x_1 \neq x_2$　かつ　$y_1 \neq y_2$ である確率を求めよ．

(2)　$x_1+y_1=x_2+y_2$ である確率を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　直角三角形の3辺の長さがすべて整数のとき，面積は2の整数倍であることを示せ.

直角三角形の斜辺の長さを c，他の2辺の長さを a，b とすると，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ.

ここで a，b がともに偶数とすると明らかにこの三角形の面積 $\frac{1}{2}ab$ は2の整数倍である.

ところでこのとき a^2+b^2 も偶数，すなわち c^2 も偶数となり，c が整数のときは c も偶数となる．よって a，b，c はすべて2の倍数となり，2で割り切れる．ちなみにこのような3辺の一例として

$a=6$，$b=8$，$c=10$ があげられる.

よって，a，b の少なくとも一方は奇数であるときを考える.

ここで，ある自然数 n を4で割った余りを考えることにより

①$n=4m$　②$n=4m+1$　③$n=4m+2$　④$n=4m+3$　に分類され，①と③は偶数，②と④は奇数である.

①のとき $(4m)^2=16m^2=8(2m^2)$　　②のとき $(4m+1)^2=8(2m^2+m)+1$

③のとき $(4m+2)^2=8(2m^2+2m)+4$　　④のとき $(4m+3)^2=8(2m^2+3m+1)+1$

より，n^2 を8で割った余りは0（①），1（②か④），4（③）となる.

a，b がともに4の倍数でないと仮定すると，少なくとも一方は奇数であることより

(i)　a，b のうち一方が②か④，一方が③

(ii)　a，b ともに②か④

となる.

このとき a^2+b^2 を8で割った余りは(i)のときは5，(ii)のときは2となる.

一方，c^2 を8で割った余りは0，1，4のいずれかであり，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する.

よって a，b のうち一方は4の倍数である.

このとき，この三角形の面積 $\frac{1}{2}ab$ は2の整数倍である.

以上より示された.

まず，面積が2の倍数になるときを考えたとき，a，b がともに偶数なら「当たり前」である．よってこのときを排除し，後の場合分けからはずすことが必要不可欠である（もちろん，そもそもそのような場合がないこともあるので，上の解答では一例をあげた）.
その上で，いくつかのピタゴラス数でシミュレートすると，どうやら a，b のうち片方が奇数で片方が4の倍数であることがわかる（各辺の公約数が存在するときを除く）．よって4で割った余りで分類することは自然な発想である．ただし n^2 を「4で割った余り」で分類すると矛盾にもちこめないことがわかる．これは剰余を考える上で「割る数」が甘かったためである．これは，たとえば整数の分類として最も単純なものに「偶数」と「奇数」の場合分けがあるが，この2種類の場合分けだけですべての整数問題の場合分けが解決しないことからもわかるであろう．よって方向修正して8で割った余りで分類した．このような試行錯誤は，必ずしもそのすべてが解答に現れてこない．最初から解答の場合分けが必ずしも思いつくわけではないことを覚えておくこと.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 n は2以上の整数とする．座標平面上の x 座標，y 座標がともに0から $n-1$ までの整数であるような n^2 個の点のうちから，異なる2個の点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を無作為に選ぶ．

(1) $x_1 \neq x_2$　かつ　$y_1 \neq y_2$ である確率を求めよ．

(2) $x_1+y_1=x_2+y_2$ である確率を求めよ．

題意の異なる2格子点の選び方は ${}_{n^2}\mathrm{C}_2\cdot 2!=\dfrac{n^2(n^2-1)}{2\cdot 1}\cdot 2=n^2(n+1)(n-1)$ 通り．

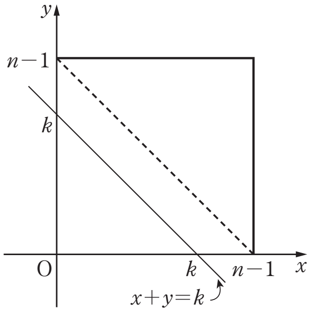
これを N とする．

(1) 0から $n-1$ までの整数から異なる2つの数を選んでそれらを x_1，x_2 とし，0から $n-1$ までの整数から異なる2つの数を選んでそれらを y_1，y_2 とした場合である．

その場合の数は　${}_n\mathrm{C}_2\cdot 2!\times{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2!=n^2(n-1)^2$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{\{n(n-1)\}^2}{N}=\dfrac{n^2(n-1)^2}{n^2(n+1)(n-1)}=\boldsymbol{\dfrac{n-1}{n+1}}$

(2) 題意の格子点のうち，直線 $x+y=k$ $(1\leqq k\leqq n-2)$ 上にある点の個数は　$k-0+1=k+1$（個）　である．



この直線上において　$x_1+y_1=x_2+y_2=k$　となる確率は

$$\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_2\cdot 2!}{N}=\frac{(k+1)k}{n^2(n+1)(n-1)}$$

図形の対称性，および直線 $x+y=n-1$ 上の n 個の点から選ぶ場合を考えて，求める確率は

$$2\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)k}{N}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2!}{N}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)k}{N}-\frac{n(n-1)}{N}=\frac{2}{N}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)-\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{N}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n-\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$$

$$=\frac{2}{n^2(n+1)(n-1)}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2n-1}{3n(n+1)}}$$

これ以外にも過去には「格子点」と明記されていない問題が何度も出題されている．もともと整数系の設定が多い場合の数・確率の分野であるからある意味当然ともいえる．とくに範囲が限定されている中で「和」を考える問題の時には積極的に狙っていきたい．
また，対称性についても「２重になるところ」の扱いは，最初から排除してあとから足す，またはかぶっていることを知りつつそのまま足してあとから共通部分を引く，といった解法に分かれるであろう．
数学のいずれの分野も，豊富な経験により見識が広がる分野である．解いたことがある問題ではなく，解いたことがある経験により未知なる問題に対処するのである．今後もみなさんの努力に期待する．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。